DEVOIR MAISON V CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Partie I : Réduction d'une matrice carrée.

1. Le programme calcule la matrice A^3 et la matrice qui apparaît dans le retour Python est la matrice A. Le programme suggère donc que $A^3 = A$. Ceci ne suffit pas encore à affirmer que $A^3 = A$ car un ordinateur fait des calculs approchés et l'apparition de A pourrait n'être qu'une coïncidence.

On vérifie donc par le calcul la suggestion de l'ordinateur. On a en effet

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = A.$$

$$\boxed{A^3 = A}$$

2. Les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines d'un polynôme annulateur. Ici, d'après la question précédente, le polynôme $P(x) = x^3 - x$ est annulateur de A. Or

$$P(x) = x(x-1)(x+1)$$

et les racines de P sont -1, 0 et 1.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } A \text{ sont } -1,\ 0 \text{ et } 1.}$$

3. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on résout successivement les trois systèmes linéaires $AX = -X$, $AX = 0$ et $AX = X$.

Date: 15 Février 2025.
http://louismerlin.fr.

- On a

$$
\begin{aligned}
AX = -X &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y + 2z & = & -x \\ x + y + 2z & = & -y \\ -2x - 3z & = & -z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & -2y \\ x & = & -z \end{array} \right. \\
&\iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

On conclut que

$$
\boxed{-1 \text{ est bien valeur propre et que } E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).}
$$

- On a

$$
\begin{aligned}
AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y + 2z & = & 0 \\ x + y + 2z & = & 0 \\ -2x - 3z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \\ x + y + 2z & = & 0 \\ x & = & -3z/2 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -z/2 \\ x & = & -3z/2 \end{array} \right. \\
&\iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

On conclut que

$$
\boxed{0 \text{ est bien valeur propre et que } E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).}
$$

- On a

$$\begin{aligned}
AX = X &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y + 2z & = & x \\ x + y + 2z & = & y \\ -2x - 3z & = & z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 2z & = & 0 \\ x + 2z & = & 0 \\ -2x - 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2z - 2y + 2z & = & 0 \\ x & = & -2z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x & = & -2z \end{array} \right. \\
&\iff X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{1 \text{ est bien valeur propre et que } E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

4. Il s'agit de diagonaliser A. Pour faire ça, il faut construire P comme une matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres. On choisit un générateur de chaque espace propre de manière à avoir les bons coefficients sur la première ligne de P, c'est-à-dire que l'on choisit comme vecteur -1-propre le vecteur

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

comme vecteur 0-propre le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

et comme vecteur 1-propre le vecteur

$$w = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On prend donc pour matrice P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La formule de changement de base affirme alors que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

5. On démontre les propriétés de l'énoncé par récurrence sur k (c'est très classique).

- **Initialisation :** On rappelle que n'importe quelle matrice à la puissance 0 est la matrice identité. Ainsi, la propriété au rang $k = 0$ se lit
$$I = PIP{-}1 = PP^{-1} = I,$$
ce qui est évidemment vrai.
- **Hérédité :** Supposons que $A^k = PD^kP^{-1}$ pour un certain entier $k \geqslant 0$. On a alors
$$A^{k+1} = A \cdot A^k = PDP^{-1}PD^kP^{-1} = PD \cdot D^kP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}.$$
La deuxième égalité provient de l'hypothèse de récurrence et de l'expression $A = PDP^{-1}$ de la question précédente.

Par récurrence sur k,
$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 0,\ A^k = PD^kP^{-1}.}$$

Partie II : Exponentielle d'une matrice carrée.

6. a. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}\alpha_n M &= \alpha_n \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_n a & \alpha_n b & \alpha_n c \\ \alpha_n d & \alpha_n e & \alpha_n f \\ \alpha_n g & \alpha_n h & \alpha_n i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \ell a & \ell b & \ell c \\ \ell d & \ell e & \ell f \\ \ell g & \ell h & \ell i \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \ell M\end{aligned}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $$\begin{aligned}M_n + M'_n &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_n & b'_n & c'_n \\ d'_n & e'_n & f'_n \\ g'_n & h'_n & i'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n + a'_n & b_n + b'_n & c_n + c'_n \\ d_n + d'_n & e_n + e'_n & f_n + f'_n \\ g_n + g'_n & h_n + h'_n & i_n + i'_n \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} a + a' & b + b' & c + c' \\ d + d' & e + e' & f + f' \\ g + g' & h + h' & i + i' \end{pmatrix} = M + M'\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}M_nM'_n &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_n & b'_n & c'_n \\ d'_n & e'_n & f'_n \\ g'_n & h'_n & i'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_na'_n + b_nd'_n + c_ng'_n & a_nb'_n + b_ne'_n + c_nh'_n & a_nc'_n + b_nf'_n + c_ni'_n \\ d_na'_n + e_nd'_n + f_ng'_n & d_nb'_n + e_ne'_n + f_nh'_n & d_nc'_n + e_nf'_n + f_ni'_n \\ g_na'_n + h_nd'_n + i_ng'_n & g_nb'_n + h_ne'_n + i_nh'_n & g_nc'_n + h_nf'_n + i_ni'_n \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} aa' + bd' + cg' & ab' + be' + ch' & ac' + bf' + ci' \\ da' + ed' + fg' & db' + ee' + fh' & dc' + ef' + fi' \\ ga' + hd' + ig' & gb' + he' + ih' & gc' + hf' + ii' \end{pmatrix} = MM'\end{aligned}$$

7. Comme D est diagonale, le calcul de ses puissances ne pose aucun problème. On a en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}.$$

De sorte que

$$S_n(D) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{c^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

On reconnait alors sur la diagonale les sommes partielles de trois séries exponentielles de paramètres respectifs a, b et c qui convergent toutes les trois respectivement vers e^a, e^b et e^c. D'après la définition de l'énoncé, on peut donc conclure que e^D existe et vaut bien

$$e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}.$$

8. **a.** On fait le calcul (sans difficulté !) et on trouve

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^3 = 0.$$

Ainsi, une récurrence immédiate permet d'obtenir $M^k = 0$ pour $k \geqslant 3$.
Si la récurrence est en effet facile et immédiate, on la fera quand même apparaître *en appréciation avec le niveau de rédaction de la production rendue* :

b. Il suit que, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} S_n(M) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} M^k \qquad \text{(car } M^k = 0 \text{ pour } k \geqslant 3) \\ &= I + M + \frac{1}{2} M^2 \qquad \text{(car } M^0 = I) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les coefficients de $S_n(M)$ sont constants. et admettent donc chacun une limite en $+\infty$ égale à la valeur de la constante. On peut donc conclure ici que e^M existe et que (pour tout $n \geqslant 2$)

$$e^M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_n(M).$$

9. **a.** Le calcul donne $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3M$.

b. Il est relativement naturel de déduire de la relation précédente (sinon, on essaie de calculer d'autres puissances pour se donner l'idée) que, pour tout $k \geqslant 1$

$$M^k = 3^{k-1}M.$$

On le montre par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $k = 1$, on a bien $M = 3^0 M$.
- <u>hérédité.</u> Si $M^k = 3^{k-1}M$ pour un certain $k \geqslant 1$, alors

$$M^{k+1} = M \cdot M^k \underset{\text{(HR)}}{=} M \cdot 3^{k-1}M = 3^{k-1}M^2 = 3^{k-1} \times 3M = 3^k M,$$

ce qui est bien la relation au rang $k+1$ et termine la récurrence.

c. On va utiliser la relation précédente pour remplacer M^k dans le calcul de $S_n(M)$. Attention cependant, cette formule n'est valable que pour $k \geqslant 1$, et la somme définissant $S_n(M)$ commence à $k = 0$. Naturellement, on veut essayer, dans la somme ainsi transformée de faire apparaître une série exponentielle *réelle* de paramètre 3.

$$\begin{aligned}
S_n(M) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}M^k = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}M^k \\
&= I + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}3^{k-1}M = I + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}3^k M \\
&= I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - \frac{3^0}{0!}\right) M \\
&= I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M,
\end{aligned}$$

comme demandé.

d. Chaque coefficient de la matrice $S_n(M)$ est donc égal, selon s'il est sur la diagonale ou non, à

$$1 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right).$$

Comme, en ayant reconnu une somme partielle de série exponentielle, on a

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\left(e^3 - 1\right),$$

on en conclut que tous les coefficients de $S_n(M)$ admettent une limite. Ainsi, e^M existe et vaut

$$e^M = \begin{pmatrix} 1 + \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & 1 + \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & 1 + \frac{e^3-1}{3} \end{pmatrix} = I + \frac{e^3-1}{3}M.$$

10. a. D'après la question **5**, $A = PDP^{-1}$. On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n(A) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(A)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}PD^kP^{-1} \\ &= P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D^k\right)P^{-1} \\ &= PS_n(tD)P^{-1} \end{aligned}$$

b. On remarque que la matrice D est diagonale et, plus précisément,

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après la question **7**, la matrice e^D existe et vaut

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^0 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Ceci veut exactement dire que

$$S_n(D) \to \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \tag{1}$$

D'après la question **6.b** et la question précédente, on a alors

$$S_n(A) = PS_n(D)P^{-1} \to Pe^DP^{-1}$$

On en déduit que e^A existe et $e^A = P\Delta P^{-1}$ avec

$$\Delta = e^D = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

11. a. On raisonne comme précédemment mais dans le cas général d'une matrice M (non explicite). Si M est diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que

$$M = PDP^{-1}.$$

En raisonnant exactement comme dans le cas de la matrice A, on montre que e^M existe et que

$$e^M = Pe^DP^{-1}.$$

Or la matrice e^D est diagonale d'après la question **7.** et l'expression ci-dessus fait alors apparaître e^M comme une matrice semblable à une matrice diagonale, elle est donc diagonalisable.

b. Si $M = PDP^{-1}$, alors $tM = tPDP^{-1} = P(tD)P^{-1}$ et la matrice tD est diagonale de sorte que tM est semblable à une matrice diagonale, donc diagonalisable. La question précédente s'applique alors à tM et on conclut que

$$e^{tM} = Pe^{tD}P^{-1}.$$

Partie III : Application à un système différentiel linéaire.

12. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}
\forall t\in\mathbb{R}, X'(t)=AX(t) &\iff \forall t\in\mathbb{R}, \begin{pmatrix} x'(t)\\ y'(t)\\ z'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}\\
&\iff \forall t\in\mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) + 2z(t)\\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t)\\ z'(t) = -2x(t) - 3z(t)\end{cases}\\
&\iff X \text{ est solution de } (S)
\end{aligned}$$

13. Soit $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(u,v,w) \text{ est un état d'équilibre de } (S) &\iff A\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix} \in E_0(A)\\
&\iff \begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ -2\end{pmatrix} \qquad \text{(cf question } \mathbf{3}\text{)}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des états d'équilibre de (S) est

$$\operatorname{Vect}(3,1,-2) = \{\lambda(3,1,-2) \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$$

14. La matrice A est diagonalisable (cf question **5**) et on a montré à la question **3** que (U_{-1},U_0,U_1) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. D'après le cours, les solutions de (S) sont toutes de la forme

$$\begin{aligned}
X(t) &= \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta e^{0t}U_0 + \gamma e^{t}U_1\\
&= \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^{t}U_1
\end{aligned}$$

où $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.

15. **a.** On considère une solution X quelconque de (S) :

$$X(t) = \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^{t}U_1$$

$$
\begin{aligned}
X \text{ est solution de } (\mathcal{P}_1) &\iff X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&\iff \alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 9 \\ \alpha + \beta = 4 \\ -2\alpha - 2\beta + \gamma = -8 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 9 \\ -\beta + 2\gamma = -1 & L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_1 \\ \beta - \gamma = 1 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 9 \\ -\beta + 2\gamma = -1 \\ \gamma = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 9 \\ -\beta = -1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 & \text{par remontées successives} \\ \gamma = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$ est

$$
\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X_1(t) = 3e^{-t}U_{-1} + U_0 = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}}
$$

b. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$
X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}
$$

donc $x_1(t) \to_{+\infty} 3$, $y_1(t) \to_{+\infty} 1$ et $z_1(t) \to_{+\infty} -2$. Ainsi la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente, de point limite $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (3, 1, -2)$. D'après la question **13**, ce point limite est un état d'équilibre du système différentiel (S).

c. On considère une solution X quelconque de (S) :

$$
X(t) = \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1
$$

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution de } (\mathcal{P}_2) &\iff X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&\iff \alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 3 \\ \alpha + \beta = 2 \\ -2\alpha - 2\beta + \gamma = -3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 3 & \\ -\beta + 2\gamma = 1 & L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_1 \\ \beta - \gamma = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 3 & \\ -\beta + 2\gamma = 1 & \\ \gamma = 1 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \qquad \text{par remontées successives}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$ est

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X_2(t) = e^{-t}U_{-1} + U_0 + e^tU_1 = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + 3 - 2e^t \\ e^{-t} + 1 \\ -2e^{-t} - 2 + e^t \end{pmatrix}}$$

d. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + 3 - 2e^t \\ e^{-t} + 1 \\ -2e^{-t} - 2 + e^t \end{pmatrix}$$

On remarque alors que $z_2(t) \to_{+\infty} +\infty$. Ainsi la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

e.
- La figure 4 est la seule où l'on a $z(t) \to_{+\infty} +\infty$. Ainsi, cette figure correspond nécessairement à la solution X_2.
- Dans la figure 3, on a $z(t) \to_{+\infty} -\infty$. Donc cette figure correspond à une trajectoire divergente. Ainsi, cette figure ne correspond pas à la solution X_1.
- Dans la figure 1, on a $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$. Cette propriété n'est pas vérifiée par la solution X_1 donc cette figure ne correspond pas à X_1.
- Par élimination, la figure 2 correspond à la solution X_1. De plus, en lisant approximativement les valeurs limites sur le graphe, le tracé est cohérent avec le fait que $x_1(t) \to_{+\infty} 3$, $y_1(t) \to_{+\infty} 1$ et $z_1(t) \to_{+\infty} -2$.

16. **a.** On applique la question **11.b** à la matrice $M = A$ (qui a elle-même été diagonalisée à la partie I). On a

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

b. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
e^{tA}C &= Pe^{tD}P^{-1}P\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} && \text{cf question } \mathbf{a}\\
&= Pe^{tD}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\\
&= P\begin{pmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\\
&= P\begin{pmatrix}\alpha e^{-t}\\ \beta\\ \gamma e^{t}\end{pmatrix}\\
&= P\left(\alpha e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\gamma e^{t}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)\\
&= \alpha e^{-t}P\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\beta P\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\gamma e^{t}P\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\\
&= \alpha e^{-t}U_{-1}+\beta U_0+\gamma e^{t}U_1\\
&= X(t)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que P est précisément la matrice obtenue en concaténant les vecteurs colonnes U_{-1}, U_0 et U_1.

c. Considérons une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre 1 :

$$y' = ay$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ est un paramètre.

D'après le cours, les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y(t) = ce^{at}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Ainsi, on a montré à la question précédente que les solutions de $X' = AX$ admettaient une "formule exponentielle" analogue : $c \in \mathbb{R}$ est analogue à $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (paramètre(s) à choisir) et e^{at} est analogue à e^{tA}.

Partie IV : Compléments sur l'exponentielle de matrices.

17. L'exponentielle de $A+B$ est donnée par la somme (infinie)

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(A+B)^k}{k!}.$$

Or, puisque les matrices A et B commutent, on peut appliquer à $(A+B)^k$ la formule du binôme. On obtient

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A^jB^{k-j} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}A^jB^{k-j} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!(k-j)!}A^jB^{k-j}.$$

C'est à ce stade que l'on permute les deux sommes. L'indice j varie de 0 à k, mais k varie lui-même de 0 à $+\infty$, de sorte que j peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et $+\infty$. Ainsi $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{k}$ devient

$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=j}^{+\infty}$ et on obtient

$$e^{A+B}=\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=j}^{+\infty}\frac{1}{j!(k-j)!}A^jB^{k-j}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{A^j}{j!}\sum_{k=j}^{+\infty}\frac{B^{k-j}}{(k-j)!}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{A^j}{j!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B^k}{k!}.$$

La dernière égalité s'obtient par le changement d'indices $k=k-j$. On reconnaît enfin la forme voulue

$$\boxed{e^{A+B}=e^A\cdot e^B.}$$

18. Toute matrice A commute avec la matrice $-A$. On peut donc appliquer la formule précédente avec A et $-A$. On a

$$e^A\cdot e^{-A}=e^{0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}.$$

Pour calculer l'exponentielle de la matrice nulle, on utilise (par exemple) la question **6** (avec $a=b=c=0$). On a alors $e^{0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}=I_3$ et on conclut alors que

$$\boxed{e^A \text{ est inversible et son inverse est } e^{-A}.}$$

19. **a.** La matrice B est triangulaire, donc ses valeurs propres se voient sur la diagonale de B. On a donc $\mathrm{Spec}(B)=\{-1,1\}$ et comme 0 n'est pas valeur propre, B est inversible.

b. C'est une question un peu technique. On pose

$$X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

de sorte que

$$X^2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}.$$

Ainsi $X^2=B$ est équivalent à la résolution du système

$$\begin{cases} a^2+bc & = & -1\\ ab+bd=b(a+d) & = & 1\\ ac+cd=c(a+d) & = & 0\\ bc+d^2 & = & -1\end{cases}$$

De la 3ème ligne, on tire que soit $c=0$ et dans ce cas là, reporté dans la 1ère ligne on trouve $a^2=-1$, ce qui est impossible ; soit $(a+d)=0$, mais dans ce cas-là, reporté dans la 2ème ligne, on trouve $ab+bd=0$, ce qui est exclu. Il n'y a donc aucune solution à ce système et donc aucune matrice X telle que $X^2=B$.

c. Il suffit de constater que toutes les matrices qui sont dans l'image de l'exponentielle sont des carrés. En effet, une matrice qui est dans l'image de l'exponentielle s'écrit nécessairement e^A et on a

$$e^A=e^{\frac{A}{2}+\frac{A}{2}}=\left(e^{\frac{A}{2}}\right)^2.$$

Puisque la matrice B n'est pas un carré, elle ne peut être dans l'image de l'exponentielle.

Conclusion : on pourrait en fait montrer que l'image de l'exponentielle est constituée exactement des matrices inversibles qui sont des carrés, mais c'est beaucoup plus difficile. Ce résultat est valable en toute dimension.